# TEMA NR. 4

# SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

1. În fiecare caz de mai jos, stabiliți care dintre vectori sunt ortogonali (perpendiculari), ținând cont de faptul că produsul scalar din spațiul $\mathbb{R}^n$ corespunzător este înzestrat (prevăzut) cu produsul scalar canonic (standard, uzual):

(a) $\vec{u} = (-1, 2, 4)$, $\vec{v} = (2, 3, -1)$ în $\mathbb{R}^3$;

(b) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ în $\mathbb{R}^3$;

(c) $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (0, 0, 0)$ în $\mathbb{R}^3$;

(d) $\vec{u} = (-2, 3, -5, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, -2, -9)$ în $\mathbb{R}^4$;

(e) $\vec{u} = (0, -1, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, -1, 2, 9)$ în $\mathbb{R}^4$;

(f) $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (-b, a)$ în $\mathbb{R}^2$.

<u>Indicație</u>. Fiecare dintre vectori este exprimat în baza canonică (standard, uzuală) din $\mathbb{R}^n$-ul corespunzător. Dacă $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sunt doi vectori arbitrari din $\mathbb{R}^n$, atunci se știe că produsul scalar canonic este $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Doi vectori sunt ortogonali dacă $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Scriem $\vec{u} \perp \vec{v}$.

<u>Răspuns</u>. (a) Da; (b) Nu, vectorii dați sunt coliniari, chiar unul opus celuilalt, adică $\vec{v} = -\vec{u}$ și deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{u} = -\|\vec{u}\|^2 = -(1+1+1) = -3 \neq 0$; (c) Da, vectorul nul este perpendicular pe orice vector din acel spațiu; (d) Da; (e) Nu; (f) Da, se poate spune că $\vec{v}$ se obține din $\vec{u}$ printr-o rotație de 90°

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

2. Fie că spațiile vectoriale reale $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ și $\mathbb{R}^4$ sunt prevăzute cu produsul scalar canonic (numit încă și Euclidian). În fiecare din cazurile de mai jos, găsiți unghiul dintre vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$:

(a) $\vec{u}=(1,-3)$, $\vec{v}=(2,4)$ în $\mathbb{R}^2$; (b) $u=(-1,0)$, $\vec{v}=(3,8)$;

(c) $\vec{u}=(-1,5,2)$, $\vec{v}=(2,4,-9)$; (d) $\vec{u}=(4,1,8)$, $\vec{v}=(1,0,-3)$ în $\mathbb{R}^3$

(e) $\vec{u}=(1,0,1,0)$, $\vec{v}=(-3,-3,-3,-3)$; (f) $\vec{u}=(2,1,7,1)$, $\vec{v}=(4,0,0,0)$ în $\mathbb{R}^4$.

Indicație. Dacă $\varphi = \measuredangle(\vec{u},\vec{v})$, atunci se știe că $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$ (desigur, cu condiția ca ambii vectori să fie nenuli).

Răspuns. (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (cât este unghiul $\varphi$?); (b) $-\frac{3}{\sqrt{73}}$ (ce se poate spune despre unghiul dintre cei doi vectori?); (c) $0$ (cum sunt vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$?); (d) $-\frac{20}{9\sqrt{10}}$; (e) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (cât este $\varphi$?); (f) $\frac{2}{\sqrt{55}}$.

3. În spațiul vectorial real al tuturor polinoamelor de grad cel mult 2, având coeficienți numere reale, notat $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, să se găsească unghiul dintre polinoamele $p$ și $q$:

(a) $p=-1+5x+2x^2$, $q=2+4x-9x^2$;

(b) $p= x-x^2$, $q=7+3x+3x^2$.

Indicație. Țineți cont că $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, iar "baza canonică" în $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ este mulțimea de polinoame $\mathcal{B}=\{1, x, x^2\}$. Rezultă atunci că $p=(-1,5,2)$ $q=(2,4,-9)$ și similar pt (b). Atunci $p\cdot q=-2+20-18=0$ deci $p$ și $q$ de la (a) sunt polinoame ortogonale. (b) La fel, $p\perp q$.

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

4. În spațiul liniar real al matricelor pătratice de ordinul al doilea, cu elementele numere reale, notat cu $M_2(\mathbb{R})$, produsul scalar "canonic" al matricelor $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ este $\langle A, B\rangle = tr(A^T \cdot B)$, unde "tr" înseamnă <u>urma matricei</u> dintre paranteze, adică suma elementelor de pe diagonala principală (vezi notițele curs).

Să se găsească cosinusul unghiului dintre matricele A și B în fiecare din cazurile de mai jos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Răspuns</u>. (a) $\frac{19}{10\sqrt{7}}$; (b) 0 (ce se poate spune despre matricele A și B?)

5. Pentru ce valori ale lui $k \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt ortogonali?

(a) $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 7, k)$

(b) $\vec{u} = (k, k, 1)$, $\vec{v} = (k, 5, 6)$

<u>Răspuns</u>. (a) $k = -3$;

(b) $k \in \{-3, -2\}$.

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

6. Fie spațiul Euclidean $\mathbb{R}^4$. Să se găsească vectorii de normă 1 (deci versori) ortogonali vectorilor $\vec{u}=(2,1,-4,0)$, $\vec{v}=(-1,-1,2,2)$ și $\vec{w}=(3,2,5,4)$.

Indicație. Notăm cu $\vec{x}$ un astfel de vector (versor). Fiind din $\mathbb{R}^4$ și versor pe deasupra, rezultă că $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ unde $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ (din cauză care are norma unitate). Se impun încă condițiile: $\vec{x}\perp\vec{u}$ ; $\vec{x}\perp\vec{v}$ ; $\vec{x}\perp\vec{w}$. Se găsește în final un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute $x_1,x_2,x_3,x_4$, dar neliniar. Se rezolvă acest sistem de gradul al doilea.

Răspuns. $\vec{x}=\pm\frac{1}{57}(-34,44,-6,11)$.

7. Într-un spațiu Euclidean are loc inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakowski $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leq\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ (egalitatea având loc dacă și numai dacă vectorii sunt coliniari (liniar dependenți) (vezi notițele Analiză matematică sem I).

Verificați de fiecare dată inegalitatea pentru vectorii

(a) $\vec{u}=(2,1)$, $\vec{v}=(1,-3)$ în $\mathbb{R}^2$;

(b) $\vec{u}=(3,-1,2)$, $\vec{v}=(0,1,-3)$ } în $\mathbb{R}^3$;

(c) $\vec{u}=(1,2,-4)$, $\vec{v}=(-2,-4,8)$ } în $\mathbb{R}^3$;

(d) $\vec{u}=(1,1,-1,-1)$, $\vec{v}=(1,2,-2,0)$ în $\mathbb{R}^4$.

Indicație. Produsul scalar este cel canonic, standard

# TEMA NR. 4

# SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

## 8 Baze ortogonale; baze ortonormate; procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

8.1 Demonstrați că sistemul de vectori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, unde $\vec{v}_1 = (0,1,0)$, $\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, are proprietatea că oricare doi din vectorii săi sunt ortogonali iar mărimea oricăruia dintre vectori este 1. Să se scrie matricea $C$ de trecere de la baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ la sistemul de vectori $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ și să se arate că $\mathcal{B}'$ este bază. Cum se numește baza ai căror vectori sunt ortogonali doi câte doi și oricare dintre vectori are lungimea 1? Să se verifice că matricea $C$ are proprietatea (*) $C\,C^T = C^T C = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cum se numește matricea $C$?

Cunoașteți și o altă matrice cu proprietatea (*)?

Cu cât este egal determinantul unei astfel de matrice?

8.2 Fie spațiul euclidian real $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ și $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ o bază a lui $V$. Să se demonstreze că $\forall\ \vec{u} \in V$ se scrie unic ca $\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \dots + \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle \vec{v}_n$.

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

8.3 Se consideră sistemul de vectori $\mathcal{B}'=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}$, unde $\vec{f}_1=(1,1,1)$, $\vec{f}_2=(0,1,1)$, $\vec{f}_3=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$, vectorii fiind dați în baza canonică din $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}=\{\vec{e}_1=(1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1)\}.$$

Să se arate că $\mathcal{B}'$ este bază în $\mathbb{R}^3$.

Pornind de la baza $\mathcal{B}'$ să se determine baza ortonormată $\mathcal{B}''=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ folosind procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Să se scrie matricea $C$ de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}''$.

Cum este baza $\mathcal{B}$? Dar matricea $C$?

Cu ce matrice se face trecerea de la baza $\mathcal{B}''$ la baza $\mathcal{B}$?

<u>Indicație</u>. Vezi exercițiul 5 din TEMA NR. 3

<u>Răspuns</u>.
$$\begin{cases}\vec{u}_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\\[2mm] \vec{u}_2=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\\[2mm] \vec{u}_3=\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{cases}$$

8.4 Arătați că $\mathcal{B}'=\{\vec{e}_1\,',\vec{e}_2\,',\vec{e}_3\,'\}$, unde $\vec{e}_1\,'=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\vec{e}_2\,'=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3\,'=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Scrieți matricea de trecere $C$ de la baza ortonormată $\mathcal{B}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ la baza $\mathcal{B}'$. Ce proprietate are $C$?

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

8.5 Descompuneți vectorul $\vec{x} = (0,2,1) \in \mathbb{R}^3$ după elementele bazei (să se arate că este bază) $\mathcal{B}' = \{ \vec{f}_1 = (1,0,1), \vec{f}_2 = (0,1,-1), \vec{f}_3 = (-1,1,1) \}$ și apoi ortonormați baza respectivă.

<u>Rezolvare</u>. Fie $C$ matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1) \}$ la sistemul $\mathcal{B}'$ de vectori. Avem schema $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$, unde știm că elementele coloanelor matricei $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sunt coordonatele vectorilor $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Deci

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se știe de asemenea că $\mathcal{B}'$ este bază dacă și numai dacă $C$ este matrice inversabilă. O matrice este inversabilă dacă determinantul ei este nenul. Avem

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

deci $\exists\, C^{-1}$ ceea ce arată că $\mathcal{B}'$ este bază.

Dacă notăm $X'$ matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza $\mathcal{B}'$, atunci se știe (vezi notițe curs) că $X' = C^{-1}X$, unde $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza canonică $\mathcal{B}$.

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

Pentru a afla inversa $C^{-1}$ aplicăm metoda transformărilor elementare aplicate liniilor matricei formată din 2 blocuri, în stânga fiind C, iar în dreapta $I_3$ matricea unitate

$$\left( C \,\vdots\, I_3 \right).$$

Oprim metoda când ajungem în faza

$$\left( I_3 \,\vdots\, B \right)$$

Se dovedește prin calcul că $B = C^{-1}$.

Transformările elementare aplicate liniilor unei matrice pătratice sunt:

- $(T_1)$ înmulțirea liniei "i" prin factorul $c \neq 0$;
- $(T_2)$ schimbarea între ele a liniilor i și j;
- $(T_3)$ adunarea la elementele liniei i a elementelor liniei j, înmulțite în prealabil cu un factor $c \neq 0$.

Dacă notăm liniile cu $L_1, L_2, \dots, L_m$ și cele obținute după aplicarea transformărilor cu $L_1', L_2', \dots, L_m'$, atunci $(T_1)$, $(T_2)$ și $(T_3)$ se pot scrie în forma:

$(T_1)$ $\quad L_i' = c L_i$;

$(T_2)$ $\quad L_i' = L_j$ și $L_j' = L_i$

$(T_3)$ $\quad L_i' = L_i + c L_j$.

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3' = L_3 + (-1)L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3' = L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3' = 1/3 L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1' = L_1 + 1 \cdot L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{L_2' = L_2 + (-1) \cdot L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare!

$$C^{-1}C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

QED.

TEMA NR. 4

SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

$$C^{-1}X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $\vec{x} = (\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$ sau

$$\vec{x} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}'}$$

Pentru ultima parte a problemei aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt. De la sistemul de vectori $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ trecem la vectorii $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ prin

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{f}_1 \\ \vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1 \\ \vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \alpha_{31}\vec{g}_1 - \alpha_{32}\vec{g}_2, \end{cases}$$

care dorim să fie ortogonali doi câte doi. Din condiția $\vec{g}_2 \perp \vec{g}_1$ găsim $\alpha_{21} = \dfrac{\vec{f}_2 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} = -\dfrac{1}{2}$

Prin urmare $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 + \frac{1}{2}\vec{f}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$.

Norma lui $\vec{g}_2$ este $\|\vec{g}_2\| = \sqrt{\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Impunând condițiile $\vec{g}_3 \perp \vec{g}_1$ și $\vec{g}_3 \perp \vec{g}_2$, găsim

$$\alpha_{31} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} = 0;$$

$$\alpha_{32} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} = 0.$$

Prin urmare $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$, iar norma lui $\vec{g}_3$ este $\|\vec{g}_3\| = \sqrt{3}$.

TEMA NR. 4

# SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

De la sistemul de vectori ortogonali doi câte doi $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ trecem la sistemul ortonormat $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, unde

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}, \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}, \quad \vec{u}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\vec{g}_2, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{g}_3 \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \vec{u}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Sistemul de <u>versori</u> $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, ortogonali doi câte doi, este baza ortonormată dorită.

Fie
$$\mathcal{B} \xrightarrow{C} \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\},$$

unde $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Atunci

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow C\,C^T = C^T C = I_3$$

Sau, altfel spus, suma pătratelor elementelor de pe orice linie (coloană) a matricei $C$ este 1, iar suma produselor elementelor corespunzătoare de pe două linii (coloane) diferite este zero. Avem că $\det C = 1$, deci baza $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ este <u>la fel orientată</u> ca și baza canonică $\mathcal{B}$.

# TEMA NR. 4

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

8.6 Folosind procedeul Gram-Schmidt să se ortonormeze vectorii liniar independenți $\vec{f}_1=(1,-2,2)$, $\vec{f}_2=(-1,0,-1)$, $\vec{f}_3=(5,-3,-7)$. În baza $B'=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}$ vectorul $\vec{x}$ are coordonatele $\vec{x}=(1,1,1)_{B'}$. Ce coordonate are $\vec{x}$ în baza canonică $B=\{\vec{e}_1=(1,0,0),\vec{e}_2=(0,1,0),\vec{e}_3=(0,0,1)\}$?

Rezolvare. $B'$ este într-adevăr bază în $\mathbb{R}^3$ pentru că matricea de trecere de la $B$ la $B'$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

este nesingulară deoarece $\det C = 27 \neq 0$.

Determinăm sistemul de vectori $\{\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$, ortogonali doi câte doi, dați de:

$$\vec{g}_1=\vec{f}_1\ ;\quad \vec{g}_2=\vec{f}_2-\alpha_{21}\vec{g}_1\ ;\quad \vec{g}_3=\vec{f}_3-\alpha_{31}\vec{g}_1-\alpha_{32}\vec{g}_2$$

Se găsește: $\alpha_{21}=-\frac{1}{3}$ ; $\alpha_{31}=-\frac{1}{3}$ ; $\alpha_{32}=1$. Deci:

$\vec{g}_1=(1,-2,2)$; $\vec{g}_2=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$; $\vec{g}_3=(6,-3,-6)$

Normele acestor vectori sunt:

$$\|\vec{g}_1\|=3\ ;\quad \|\vec{g}_2\|=1\ ;\quad \|\vec{g}_3\|=9$$

Sistemul de vectori $\vec{u}_1=\frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}$, $\vec{u}_2=\frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}$, $\vec{u}_3=\frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|}$ este ortonormat, iar baza $B''=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ este ortonormată. Avem: $\vec{u}_1=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\vec{u}_2=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $\vec{u}_3=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Matricea $Q$, de trecere de la baza $B$ la

TEMA NR. 4

# SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

baza $\mathcal{B}''$ este

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Trecerea de la baza $\mathcal{B}'$ la baza $\mathcal{B}$ se face cu matricea $C^{-1}$. În legea de schimbare a coordonatelor unui vector apare inversa matricei de trecere. Deoarece $(C^{-1})^{-1} = C$ rezultă că legătura între coordonate va fi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Prin urmare $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} =$

$$= 5\vec{e_1} - 5\vec{e_2} - 6\vec{e_3} = (5,-5,-6).$$

8.7 Să se ortonormeze baza

$$\mathcal{B}' = \{\vec{f_1} = (1,1,-1),\ \vec{f_2} = (1,-1,1),\ \vec{f_3} = (0,1,1)\}$$

din $\mathbb{R}^3$. Se cer apoi coordonatele vectorului $\vec{x} = (1,1,2)_{\mathcal{B}'} = \vec{f_1} + \vec{f_2} + 2\vec{f_3}$ în baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e_1} = (1,0,0),\ \vec{e_2} = (0,1,0),\ \vec{e_3} = (0,0,1)\}$.

Răspuns. $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$, $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

$$\vec{x} = (2,2,2) = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3}.$$

TEMA NR. 4

# SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

9. Arătați că punctele $A(2,-1,1)$, $B(3,2,-1)$ și $C(7,0,-2)$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic. În care dintre vârfuri este unghiul de $90°$?

Rezolvare. Vectorii de poziție ai celor trei vârfuri sunt $\vec{r}_A = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{r}_B = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\vec{r}_C = 7\vec{e}_1 \quad -2\vec{e}_3$$

Vectorii $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ și $\vec{BC}$ se exprimă cu ajutorul vectorilor de poziție de mai sus după cum urmează

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (1,3,-2)$$

$$\vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 = (5,1,-3)$$

$$\vec{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (4,-2,-1).$$

Se observă că produsul scalar al vectorilor $\vec{AB}$ și $\vec{BC}$ este nul, deci $\vec{AB} \perp \vec{BC}$. Triunghiul $ABC$ este dreptunghic și are unghiul drept în punctul $B$. Se poate verifica aceasta și cu teorema lui Pitagora. Pentru aceasta trebuie calculate lungimile laturilor triunghiului, deci normele vectorilor $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ și $\vec{BC}$. Avem

$\|\vec{AB}\| = c = \sqrt{14}$, $\|\vec{AC}\| = b = \sqrt{35}$, $\|\vec{BC}\| = \sqrt{21} = a$

Se vede că $c^2 + a^2 = b^2$, deci $\vec{AB}$ și $\vec{BC}$ sunt catete.